

B) Transformations spécifiques.

Il est nécessaire pour la suite de rappeler la notion d'enveloppe d'une famille de droites. L'enveloppe d'une famille de droites à un paramètre (Δ_t) est la courbe (Γ) formée des *points caractéristiques* des droites Δ_t , points limites quand t' tend vers t du point d'intersection de (Δ_t) avec $(\Delta_{t'})$ (éventuellement à l'infini) ; la courbe (Γ) est en général tangente en chacun de ses points à une courbe (Γ_t) et toute droite Δ_t est tangente en au moins un point à (Γ) , sauf dans le cas où, sur un intervalle, les droites Δ_t passent par un point fixe, auquel cas, ce point appartient à l'enveloppe.

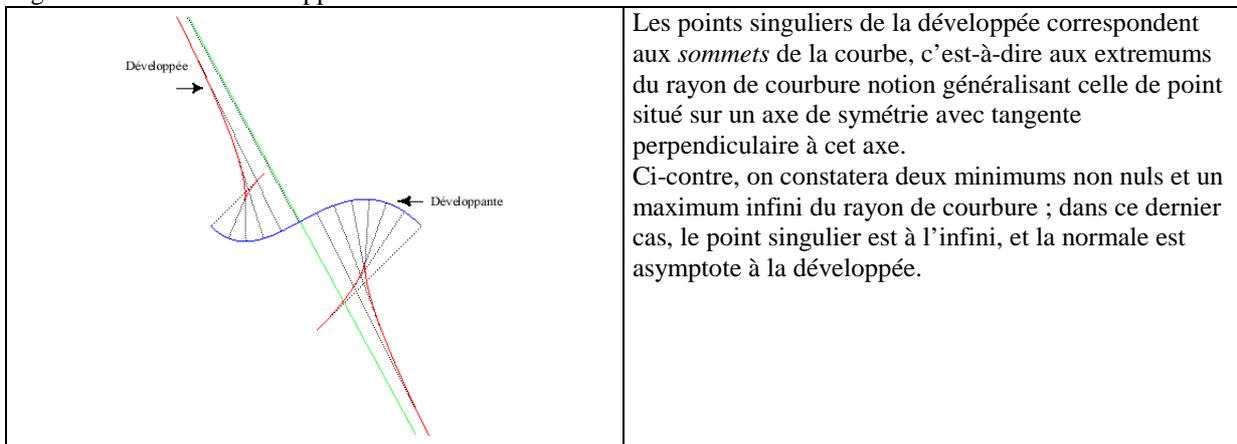
I) Transformation par développée et développante.

La *développée* (notion introduite par Huygens en 1673) d'une courbe est l'enveloppe de ses normales. Le point caractéristique sur chaque normale est le point d'intersection avec une normale infiniment voisine, point qui est par définition le centre de courbure : la développée est donc aussi le lieu des centres de courbure.

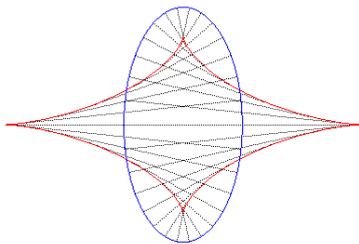
L'abscisse curviligne de la développée est le rayon de courbure de la courbe de départ ; ceci se traduit cinématiquement par le fait que la normale roule sans glisser sur la développée.

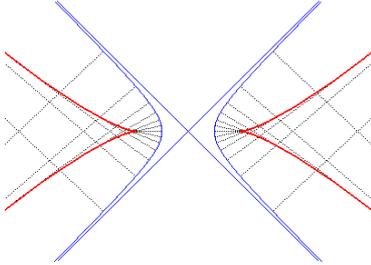
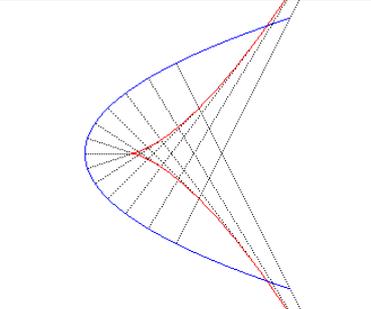
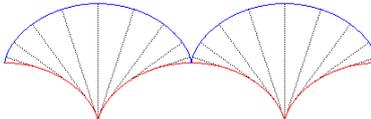
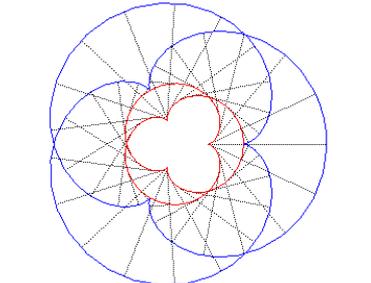
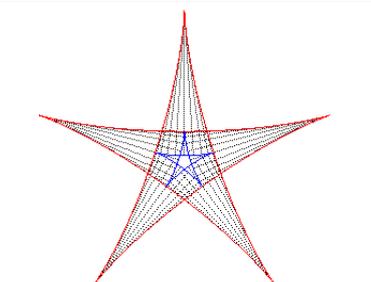
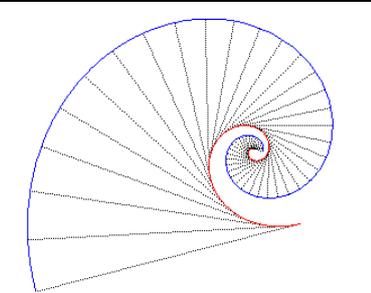
Si donc on appelle *développantes* d'une courbe les courbes dont elle est la développée, les développantes sont aussi les lieux des points d'une droite roulant sans glisser sur la courbe. Cela peut se matérialiser par un fil enroulé sur la courbe que l'on déroule en le laissant tendu.

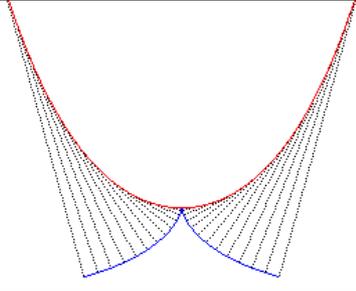
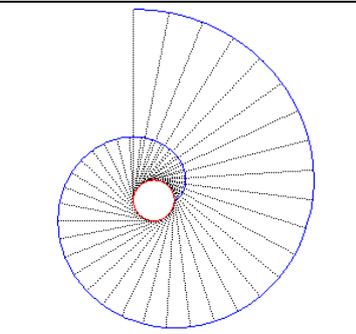
fig. 13 : tracé d'une développée.



tab. 2 : exemples de développées

courbe de départ	développée	Figure
ellipse : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	tétracuspide : $\left(\frac{x}{kb}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{ka}\right)^{2/3} = 1$ avec $k = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$	

<p>hyperbole : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$</p>	<p>courbe de Lamé : $\left(\frac{x}{kb}\right)^{2/3} - \left(\frac{y}{ka}\right)^{2/3} = 1$ avec $k = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$</p>	
<p>parabole : $y^2 = 2px$</p>	<p>parabole semi-cubique : $27py^2 = 8(x-p)^3$</p>	
<p>cycloïde (lieu d'un point d'un cercle roulant sans glisser sur une droite)</p>	<p>la même cycloïde tradatée</p>	
<p>épicycloïde de paramètre q (lieu d'un point d'un cercle de rayon R roulant extérieurement et sans glisser sur un cercle de rayon qR). $q = 1$: cardioïde ; $q = 2$: néphroïde</p>	<p>épicycloïde semblable dans le rapport $q/(q+2)$</p>	
<p>hypocycloïde de paramètre q (lieu d'un point d'un cercle de rayon R roulant intérieurement et sans glisser sur un cercle de rayon qR). $q = 3$: deltoïde ; $q = 2$: astroïde</p>	<p>hypocycloïde semblable dans le rapport $q/(q-2)$</p>	
<p>spirale logarithmique : $\rho = e^{k\theta}$</p>	<p>spirale logarithmique : $\rho = e^{k\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}$</p>	

tractrice : $\begin{cases} x = t - \text{th } t \\ y = 1 / \text{ch } t \end{cases}$	chaînette : $y = \text{ch } x$	
développante de cercle : $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$	cercle : $x^2 + y^2 = 1$	

Monge a étendu ces notions à l'espace en 1785. Il a dénommé « surface polaire » l'enveloppe des plans normaux à une courbe gauche. Deux plans normaux infiniment voisins se coupant suivant l'axe de symétrie du cercle de courbure, la surface polaire est aussi la réunion des axes des cercles de courbures de la courbe, soit la réunion des droites passant par le centre de courbure et orthogonales au plan osculateur. C'est une surface développable qui est un cylindre si et seulement si la courbe de départ est plane (la surface polaire est alors le cylindre orthogonal au plan de la courbe construit sur sa développée) et qui est un cône si et seulement si la courbe de départ est sphérique. Dans les autres cas, l'arête de rebroussement de la surface polaire (courbe enveloppe des droites engendrant la surface) est le lieu des centres des sphères osculatrices à la courbe.

Il ne faut par contre pas dénommer « développée » d'une courbe gauche le lieu de ses centres de courbure, car les normales principales ne seraient pas tangentes à cette courbe. La bonne notion de développée est celle d'enveloppe d'une famille de normales à la courbe ; les développées sont donc tracées sur la surface polaire, et c'en sont des géodésiques (courbes qui se développent en des droites). On obtient une développée en menant d'un point de la courbe un fil tangent à la surface polaire et en l'enroulant ensuite librement sur cette polaire.

Lorsqu'un plan normal décrit la courbe de départ, il pivote sans glisser sur la surface polaire ; les *développantes* d'une surface développable, courbes dont la surface est la polaire, s'obtiennent donc comme lieux des points d'un plan pivotant sans glisser sur la surface.

De même les développantes d'une courbe gauche, courbes dont la courbe est une développée, sont les lieux des points d'une droite roulant sans glisser sur la courbe.

II) Transformation par parallèles.

Deux courbes sont dites *parallèles* si toute normale à l'une est une normale à l'autre ; on montre qu'alors la distance entre deux points à normale commune est une constante, appelée distance de parallélisme.

Comme pour les droites, la relation de parallélisme des courbes planes est une relation d'équivalence ; une classe d'équivalence est l'ensemble des trajectoires des points d'une droite qui roule sans glisser sur une courbe, qui est la développée commune à toutes ces courbes.

Les courbes parallèles à une courbe sont donc les développantes de sa développée.

Les courbes parallèles à une courbe (Γ_0) sont les courbes (Γ_a) , parallèle à (Γ_0) d'indice a , obtenues en reportant algébriquement une "longueur" a à partir des points de (Γ_0) sur la normale orientée, autrement dit le lieu des points $M = M_0 + a\overline{N_0}$ où $\overline{N_0}$ est le vecteur normal en M_0 .

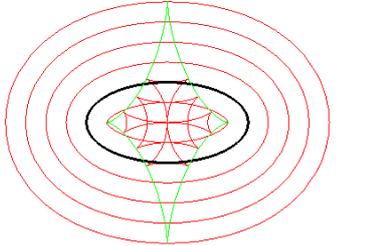
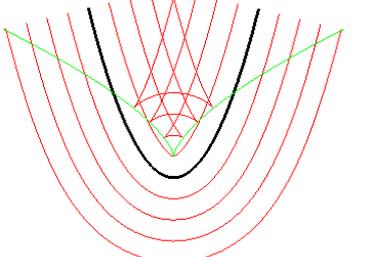
La réunion de (Γ_a) et (Γ_{-a}) est l'enveloppe des cercles de rayon a centrés sur (Γ_0) ; c'est donc aussi le contour apparent de la projection d'un tube gauche dont l'âme se projette suivant (Γ_0) ; ceci explique pourquoi les courbes parallèles à l'ellipse s'appellent des toroïdes (contour apparent de la projection d'un tore).

Interprétation physique : si la courbe (Γ_0) est une source lumineuse, d'après le principe de Huygens, les "fronts d'ondes" sont les enveloppes des ondelettes élémentaires circulaires émises par tous les points de la courbe (Γ_0) ; ce sont donc exactement les courbes parallèles à (Γ_0) .

Les points singuliers des courbes parallèles décrivent la développée de la courbe de base ; avec l'interprétation physique précédente, la développée représente donc le lieu où sont concentrés les rayons lumineux émis par la courbe lumineuse.

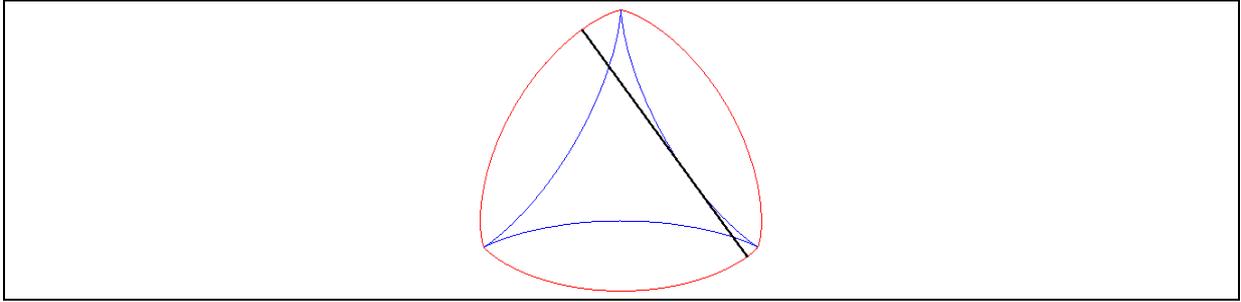
Exemples :

tab. 3

courbe de départ	courbes parallèles	figure avec quelques parallèles et la développée.
ellipse : $\frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{v^2} = 1$	toroïdes : $\begin{cases} x = \left(u \pm \frac{ua}{\sqrt{u^2 \sin^2 t + v^2 \cos^2 t}} \right) \cos t \\ y = \left(v \pm \frac{ad}{\sqrt{u^2 \sin^2 t + v^2 \cos^2 t}} \right) \sin t \end{cases}$	
parabole : $y^2 = 2px$	$\begin{cases} x = -p \cot t + a \cos t \\ y = \frac{p}{2} \cot^2 t + a \sin t \end{cases}$	

Le lieu d'un point d'une droite roulant sans glisser sur une hypocycloïde à nombre impair de rebroussements est une courbe qui est parallèle à elle-même ; lorsqu'elle est convexe, on obtient une courbe lisse de largeur constante : dans toute direction, la largeur de la bande circonscrite est constante (fig. 14).

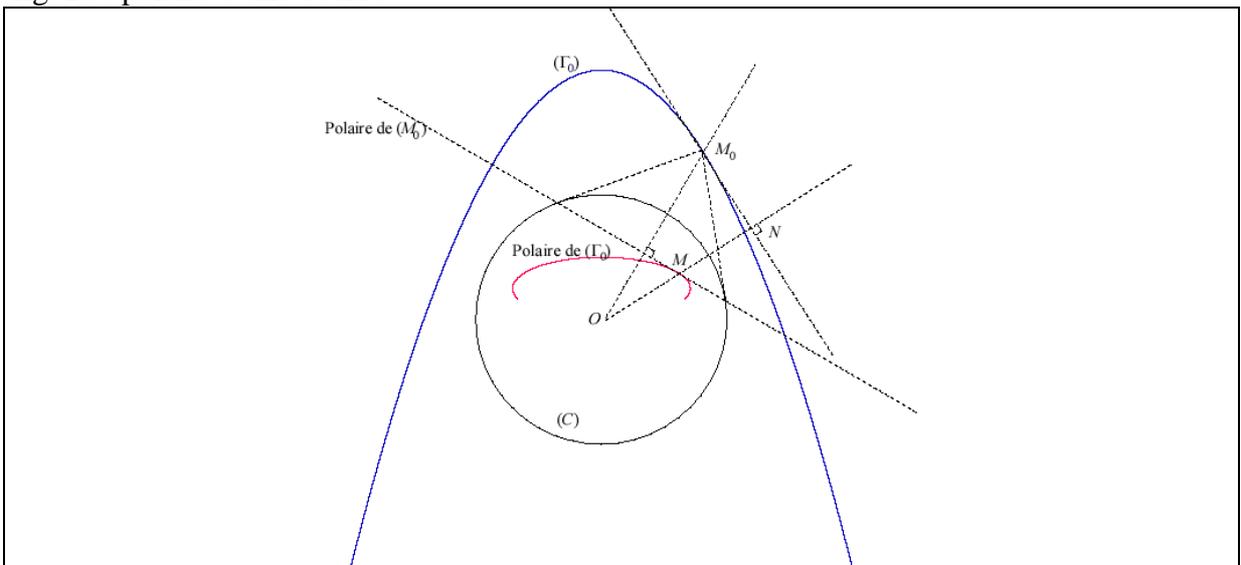
fig. 14 : courbe de largeur constante, parallèle à elle-même, développante d'une deltoïde.



III) Transformation par polaires réciproques.

La *polaire réciproque* (en abrégé : *polaire*) d'une courbe plane (Γ_0) par rapport à un cercle (C) est l'enveloppe des polaires des points de (Γ_0) par rapport à (C) ; c'est aussi l'ensemble des pôles des tangentes à (Γ_0) par rapport à (C). Elle permet donc une visualisation dans le plan de départ \bar{P} de la transformée de la courbe par la dualité décrite ci-dessus en A) V) (voir figure 15).

fig. 15 : polaire d'une courbe

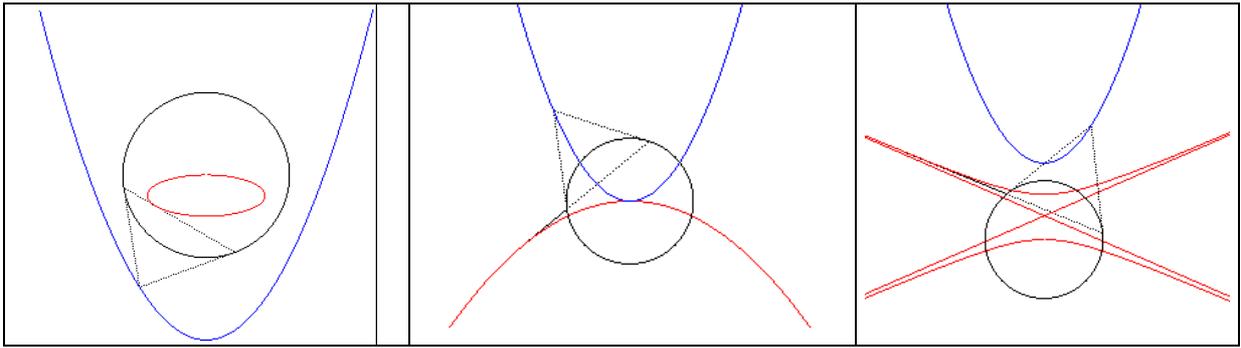


Exemples :

La polaire d'une conique propre est une conique propre, qui est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que le pôle est à l'intérieur (i. e. dans la zone contenant les foyers), sur, ou à l'extérieur de la conique.

Les inverses des polaires vues ci-après donneront d'autres exemples.

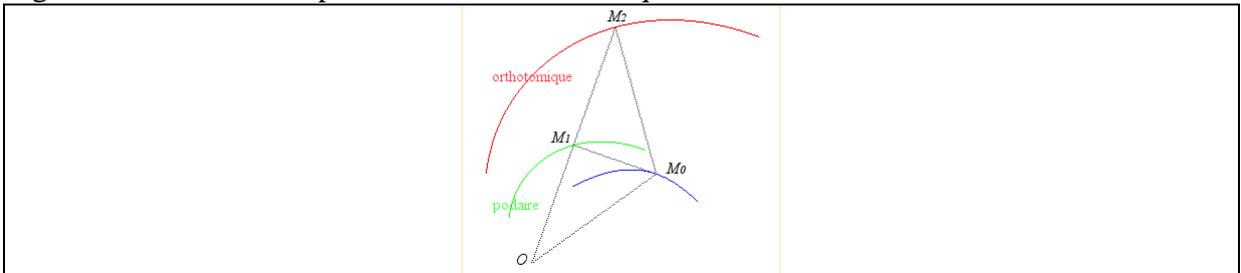
fig. 16 : polaires d'une conique.



IV) Transformation par podaire et transformations associées.

La *podaire* (du grec, pous, podos "pied", notion étudiée par Maclaurin en 1718) d'une courbe (Γ_0) par rapport à un point O est le lieu des pieds des perpendiculaires issues de O aux tangentes à la courbe (Γ_0) ; la courbe *orthotomique* de (Γ_0) par rapport à O est, elle, le lieu des symétriques de O par rapport aux tangentes à la courbe (Γ_0) . C'est donc l'image de la podaire de (Γ_0) par rapport à O dans une homothétie de centre O et de rapport 2.

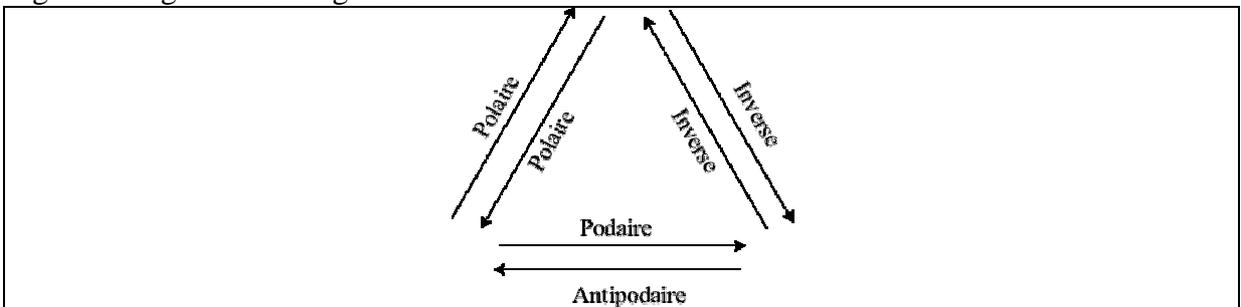
fig. 17 : courbe avec sa podaire et son orthotomique.



La podaire est aussi l'enveloppe des cercles de diamètre $[OM_0]$, M_0 décrivant (Γ_0) (propriété donnant une construction de la tangente à la podaire).

C'est enfin l'inverse par rapport à tout cercle de centre O de la polaire de (Γ_0) par rapport à ce cercle (voir le lieu du point N dans la figure 15) ; cette propriété peut être illustrée par le diagramme triangulaire :

fig. 18 : diagramme triangulaire 1

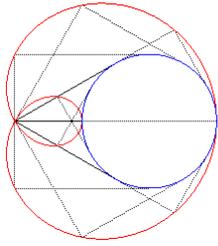
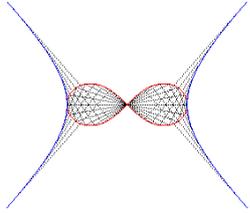
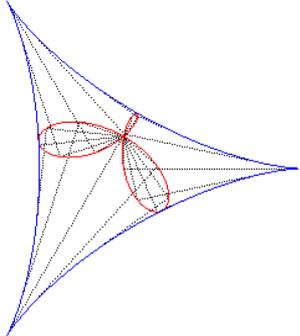
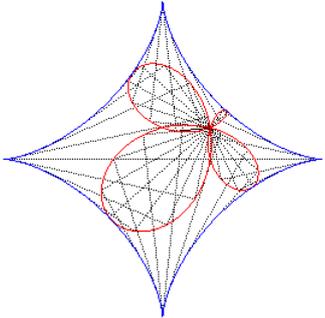
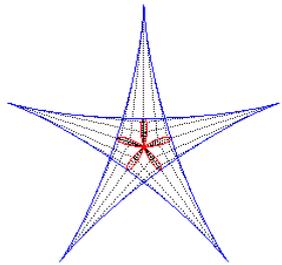
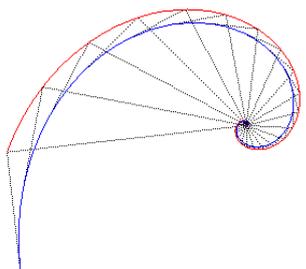


Exemples (tableau 8):

tab. 4 : exemples de podaires.

antipodaire	position du	position du	podaire	
-------------	-------------	-------------	---------	--

	pôle par rapport à l'antipodaire	pôle par rapport à la podaire		figure
parabole	foyer	extérieur à la droite	droite (tangente au sommet de la parabole)	
"	à l'intérieur de la parabole (sauf le foyer)	point isolé	cubique circulaire rationnelle à point isolé	
"	sur la parabole	point de rebroussement	cissoïde (cubique circulaire rationnelle à point de rebroussement)	
"	à l'extérieur de la parabole	point double	cubique circulaire rationnelle à point double (strophoïde quand le pôle est sur la directrice de la parabole)	
conique à centre	foyer	extérieur au cercle	cercle (principal de la conique)	
"	différent du foyer	point singulier réel	quartique bicirculaire rationnelle	

cercle	extérieur au cercle	point singulier réel	limaçon de Pascal (cardioïde quand le pôle est sur le cercle)	
hyperbole équilatère	centre	point double	lemniscate de Bernoulli	
deltoïde	quelconque	point singulier	folium	
astroïde	quelconque		scarabée	
épi- ou hypocycloïde	centre	centre	rosace	
spirale logarithmique	centre	centre	spirale logarithmique	

V) Transformation par caustique.

Le terme caustique désigne d'une façon générale l'enveloppe des rayons lumineux issus d'un point à distance finie ou infinie après modification par un instrument optique. Même si cela ne correspond pas à la réalité physique, on considère le rayon modifié en entier, y compris la demi-droite virtuelle.

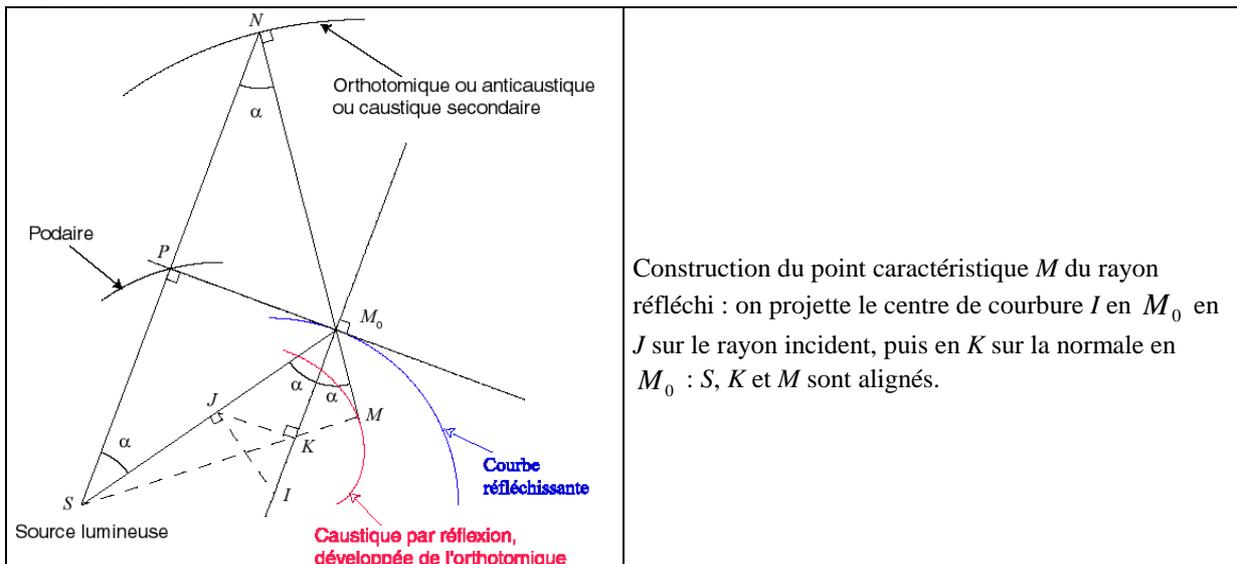
Nous ne considérerons ici que deux types de caustiques : par réflexion, et par réfraction, parfois appelées catacaustiques et diacaustiques.

1) Caustique par réflexion.

La *caustique par réflexion* d'une courbe (Γ_0) pour une source lumineuse S est l'enveloppe des rayons issus de S après réflexion par (Γ_0) considérée comme le profil d'un miroir.

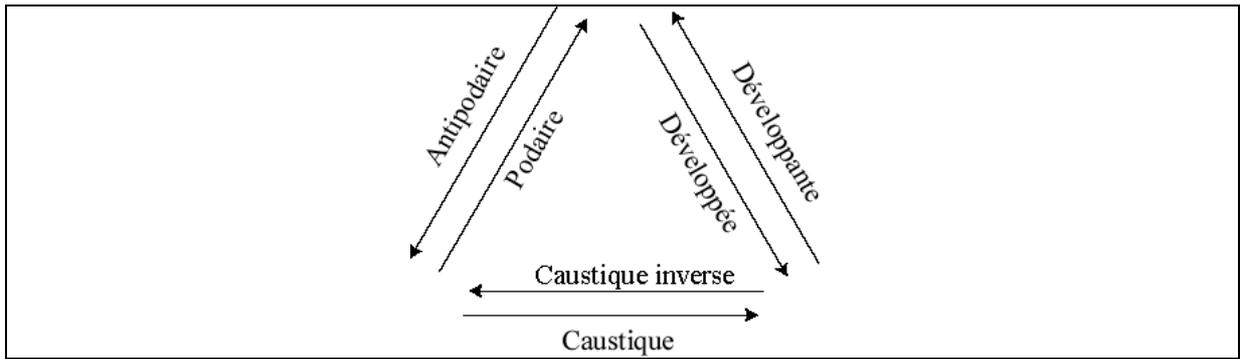
Lorsque S est à distance finie, la caustique par réflexion est liée aux transformations vues précédemment ; elle est en effet la développée de la courbe orthotomique, appelée dans ce cas plutôt *anticaustique*, ou *caustique secondaire* ; rappelons que cette orthotomique est elle-même image de la podaire de (Γ_0) par rapport à S dans une homothétie de centre S et de rapport 2. D'un point de vue physique, tout se passe donc comme si l'orthotomique était la courbe émettrice (voir figure 19).

fig. 19 : construction de la caustique par réflexion, avec des rayons issus d'une source à distance finie.



On a donc le diagramme triangulaire (en négligeant les similitudes) :

fig. 20 : diagramme triangulaire 2.

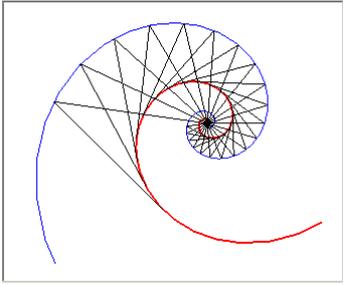
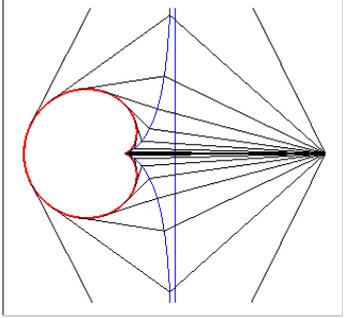
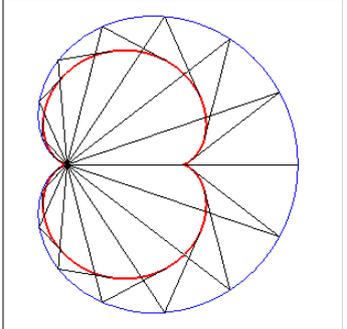


Application de ce résultat : les caustiques par réflexion de cercle sont les développées de limaçon de Pascal (podaire de cercle), et l'antipodaire d'une courbe cycloïdale a pour caustique par réflexion une courbe cycloïdale semblable.

Exemples (tableau 5):

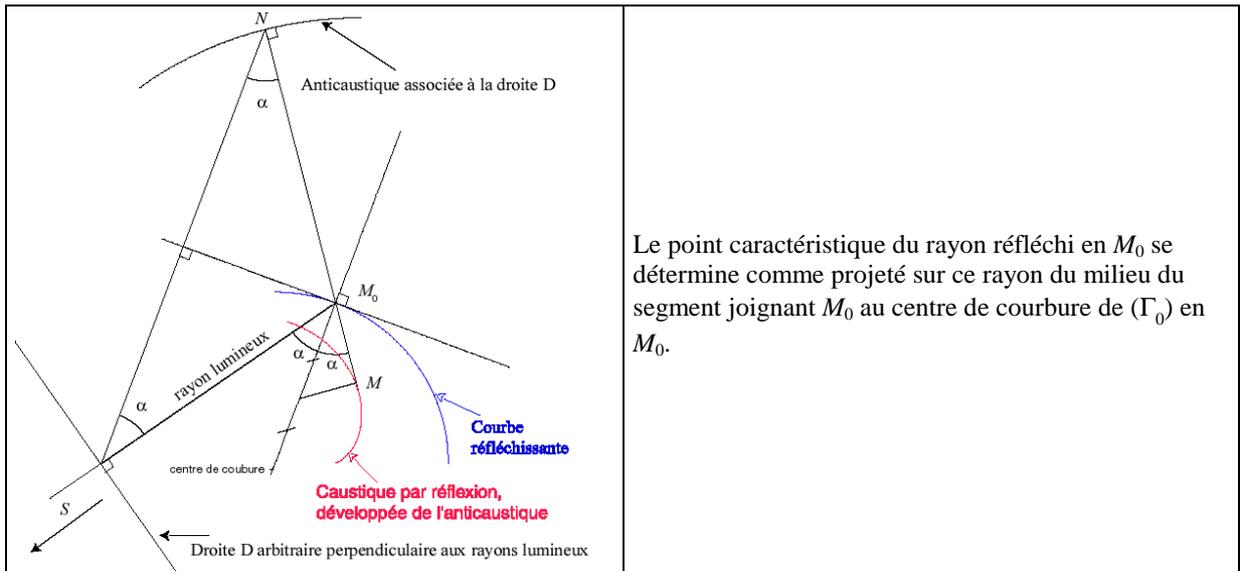
tab 5 : exemples de caustiques.

courbe réfléchissante	source lumineuse	caustique par réflexion	figure
cercle	sur le cercle et au sommet de la cardioïde	cardioïde (= développée de cardioïde)	
parabole	foyer de la parabole	se réduit à l'infini dans la direction de l'axe de la parabole	
conique bifocale	foyer de la conique	se réduit à l'autre foyer	

spirale logarithmique	point asymptote de la spirale	spirale logarithmique	
cissoïde de Dioclès	point $(4a, 0)$	cardioïde	
cardioïde	point de rebroussement	néphroïde	

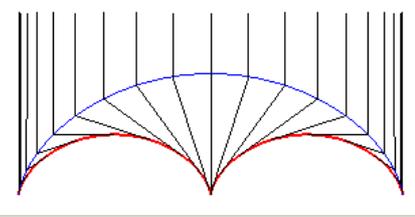
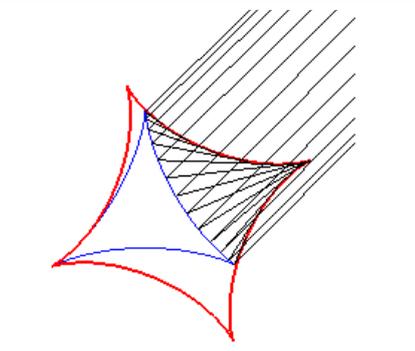
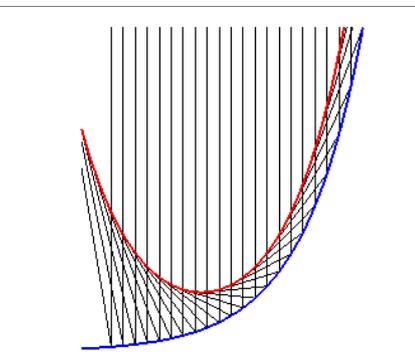
Lorsque S est à l'infini (les rayons incidents sont parallèles), la caustique peut également se construire comme développée ; une droite D orthogonale aux rayons étant choisie, la caustique est la développée de l'*anticaustique associée à la droite D* , lieu du symétrique par rapport à la tangente en M_0 du projeté de M_0 sur D ; remarquons que les différentes anticaustiques associées aux droites D sont parallèles et ont donc la même développée (voir figure 20).

fig. 20 : construction de la caustique par réflexion, avec des rayons parallèles.



tab. 6 : exemples de caustiques avec des rayons parallèles.

courbe réfléchissante	direction des rayons	caustique	
cercle	quelconque	néphroïde (courbe de la tasse de café)	
parabole	parallèle à l'axe	foyer	
parabole	perpendiculaire à l'axe	cubique de Tschirnhausen	

arche de cycloïde	perpendiculaire à l'axe de roulement	deux arches de cycloïde réduites de moitié	
deltoïde	quelconque	astroïde	
courbe exponentielle $y = e^x$	parallèles à Oy	chaînette	

2) Caustique par réfraction.

La *caustique par réfraction* (ou *diacaustique*) d'une courbe (Γ_0) pour une source lumineuse S est l'enveloppe des rayons issus de S après réfraction par (Γ_0) considérée comme le profil d'un dioptré, séparant deux milieux de réfringences distinctes.

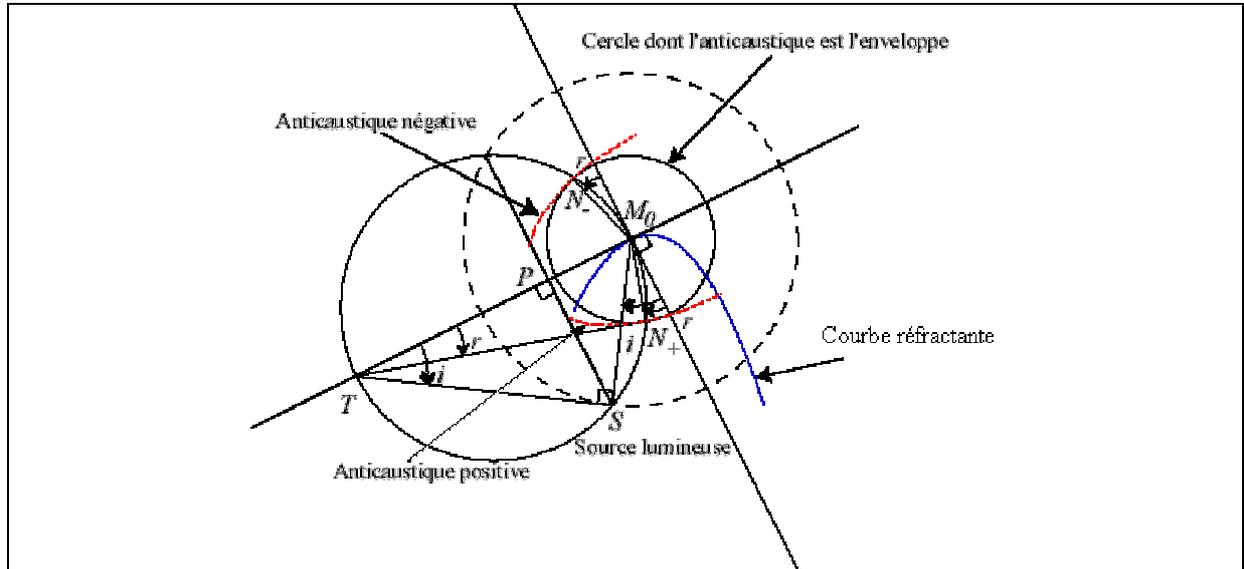
Si M_0 est un point de la courbe (Γ_0) et n une constante (qui peut être négative), le rayon réfracté du rayon incident (SM_0) est la droite (D) faisant un angle r avec la normale (N) à (Γ_0) en M_0 , avec $\frac{\sin i}{\sin r} = n$, où i est l'angle $(SM_0, (N))$.

Seul le cas $n > 0$ correspond à la réfraction physique (n est alors le rapport $\frac{n_2}{n_1}$ des indices de réfraction de l'autre côté de S et du côté de S , donc aussi le rapport des vitesses de la lumière du côté de S et de l'autre côté) ; le cas $n = -1$ redonne le cas de la réflexion.

On désigne par *caustique par réfraction complète* pour la constante $n > 0$ la réunion des caustiques pour les constantes n et $-n$; c'est la développée de l'*anticaustique* de (Γ_0) par rapport à S associée à la constante n , enveloppe d'un cercle (C) centré en M_0 sur (Γ_0) et de

rayon $\frac{M_0S}{n}$ (donc dans un rapport constant avec la distance de M_0 à la source lumineuse).
 L'anticaustique généralise donc l'orthotomique, obtenue pour $n = 1$ (voir figure 21).

fig. 21 : construction des anticaustiques positives et négatives d'une courbe.



Exemple : les anticaustiques de droite sont les coniques et les anticaustiques de cercle sont les ovales de Descartes (comprenant les limaçons de Pascal, obtenus lorsque la source lumineuse est sur le cercle). Les caustiques correspondantes en sont donc leurs développés.

Plus précisément, si S' est le conjugué de S par rapport à un cercle (C) de centre O et de rayon R , l'anticaustique de (C) par rapport à S pour la constante n est l'ovale de Descartes défini par : $R MS \pm d MS' = \pm \frac{SS'}{n}$, où $d = SO$ (voir figure 22).

fig. 22 : un ovale de Descartes obtenu comme anticaustique de cercle.



Les anticaustiques possèdent deux belles propriétés de réciprocité, constituant les théorèmes de Mannheim :

1) l'inverse de l'anticaustique est l'anticaustique de l'inverse.

2) l'anticaustique de l'anticaustique (avec le même indice n et par rapport au même point lumineux S) est une courbe semblable à la courbe de départ (centre S et rapport $1-1/n^2$).

Exemple d'application : la caustique par réfraction complète d'un ovale de Descartes par rapport à un foyer étant un autre foyer (propriété qui est justement la raison de leur étude par Descartes), l'anticaustique est un cercle. Voilà pourquoi les anticaustiques de cercles sont les ovales de Descartes.

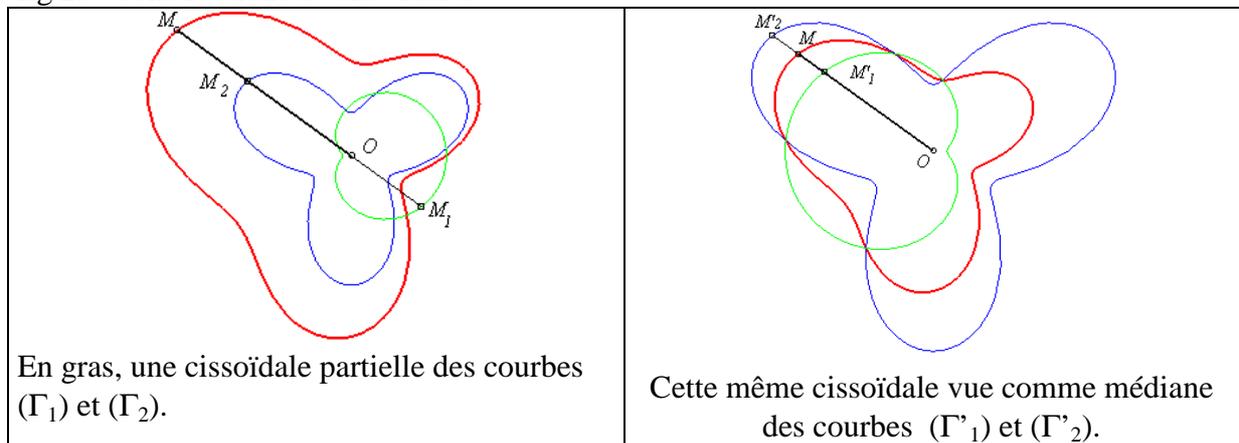
Citons encore la notion d'*orthocaustique* d'une courbe, qui est l'enveloppe des perpendiculaires aux rayons issus de S au point d'impact sur la courbe. Mais l'orthocaustique n'est autre que l'antipodaire, et ne fait qu'ajouter un terme de vocabulaire.

VI) Transformation par cissoïdale.

La (courbe) *cissoïdale* (du grec *kissos* « lierre ») de deux courbes (Γ_1) et (Γ_2) relativement à un point O est le lieu (Γ) des points M tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M_1M_2}$ où M_1 est un point de (Γ_1) et M_2 un point de (Γ_2) . Si (Γ'_1) et (Γ'_2) sont les images de (Γ_1) et (Γ_2) dans les homothéties de centre O et de rapports respectifs -2 et 2 , la cissoïdale est aussi le lieu des milieux des segments $[M'_1, M'_2]$ où M'_1 est un point de (Γ'_1) et M'_2 un point de (Γ'_2) , de sorte que la cissoïdale est une sorte de « médiane » entre ces deux courbes.

Si (Γ_1) et (Γ_2) ont pour équations polaires respectives $\rho = f_1(\theta)$ et $\rho = f_2(\theta)$, la courbe $\rho = f_2(\theta) - f_1(\theta)$ est une portion de la cissoïdale ; pour obtenir la cissoïdale complète, il faut considérer les équations $\rho = f_2(\theta) - f_1(\theta + 2k\pi)$ ou $\rho = f_2(\theta) + f_1(\theta + (2k+1)\pi)$ (voir figure 23).

fig 23 : constructions de cissoïdales.



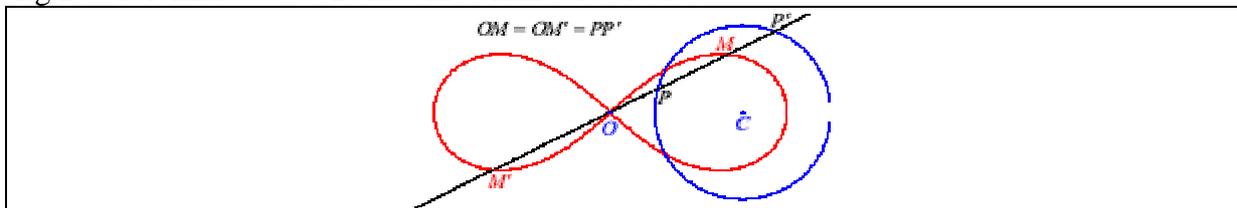
Lorsqu'on échange les rôles de (Γ_1) et (Γ_2) , la cissoïdale est changée en sa symétrique par rapport à O , et la transformation $(\Gamma_1) \mapsto (\Gamma)$ est involutive en ce sens que la cissoïdale de (Γ) et (Γ_2) relativement à O est la courbe (Γ_1) de départ.

Exemples :

- lorsque (Γ_1) et (Γ_2) sont deux droites parallèles, la cissoïdale est une troisième droite parallèle.

- lorsque (Γ_1) et (Γ_2) sont deux droites sécantes, la cissoïdale est une hyperbole passant par O , d'asymptotes (Γ_2) et la droite symétrique de (Γ_1) par rapport à O .
- lorsque (Γ_1) est un cercle et que O est le centre de ce cercle, on obtient les *conchoïdes* (voir ci-dessous) de la courbe (Γ_2) .
- lorsque (Γ_1) est une conique, (Γ_2) une droite, O sur la conique, on obtient les *cissoïdales de Zahradnik* ; ce sont exactement les cubiques rationnelles dont le point singulier n'est pas à l'infini et qui possèdent au moins une asymptote (à distance finie). Lorsque la conique est un cercle, on obtient exactement les cubiques circulaires rationnelles.
- lorsque (Γ_1) et (Γ_2) sont des cercles et O est sur l'un des cercles, on obtient les *quartiques bicirculaires unicursales*.
- Lorsque les deux courbes (Γ_1) et (Γ_2) sont confondues, la cissoïdale n'est pas forcément réduite à un point (car les points M_1 et M_2 peuvent être distincts). Par exemple, lorsque (Γ_1) et (Γ_2) sont deux cercles confondus, les cissoïdales associées sont les « courbes de Booth », dont la lemniscate de Bernoulli est un cas particulier.

fig 24 : la lemniscate de Bernoulli comme cissoïdale :



On peut s'intéresser au cas limite où le pôle cissoïdal est à l'infini, disons dans la direction de Ox ; à deux courbes d'équation $y = f_1(x)$ et $y = f_2(x)$ est alors associée la courbe $y = f_2(x) - f_1(x)$.

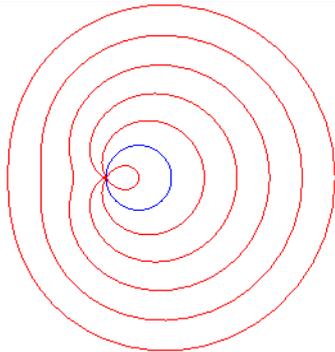
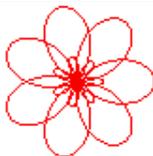
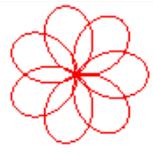
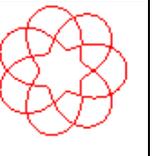
VII) Transformation par conchoïde.

La *conchoïde* (du grec *kogkhoeidês* « semblable à une coquille ») d'une courbe (Γ_0) de pôle O et de raison a est le lieu des points M de la droite (OM_0) situés à une distance a de M_0 , M_0 décrivant (Γ_0) ; c'est un cas particulier de *cissoïdale* (voir ci-dessus). L'équation polaire est $\rho = f(\theta) \pm a$ si $\rho = f(\theta)$ est celle de la courbe de départ.

Exemples :

tab 7 : exemple de conchoïdes

courbe de départ	conchoïde	
droite	conchoïde de Nicomède	

cercle	Limaçon de Pascal			
rosace $\rho = \cos n\theta$	courbe ornementale n'ayant pas reçu de nom précis.	Cas $n = 7/3$		
				
		raison < 1	raison = 1	raison > 1

BIBLIOGRAPHIE :

M. AUDIN, *Géométrie, de la licence à l'agrégation*, Belin & Espaces 34, Paris et Montpellier, 1998.

H. BROCARD & T. LEMOYNE, *Courbes géométriques remarquables (courbes spéciales) planes et gauches*, 3 tomes, Vuibert, 1919, réédité par A. Blanchard, 1967.

G. CAGNAC, E. RAMIS, J. COMMEAU, *Traité de mathématiques spéciales, Applications de l'analyse à la géométrie*, Masson, Paris, 1971.

K. FLADT, *Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven*, Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt am Main, 1962.

C.G. GIBSON, *Elementary geometry of differential curves*, Cambridge University Press, 2001

F. GOMES TEXEIRA, *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches*, 3 tomes, Académie royale des sciences de Madrid, 1909, réédité par Chelsea Publishing Company, USA, 1971.

G. LORIA, *Curve piane speciali algebriche e trascendenti, teoria e storia*, 2 tomes, Hoepli, Milan, 1930 ; version allemande antérieure : *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven*, Theorie und Geschichte, traduit de l'italien par F. Schütte, 2 volumes, Leipzig, 1910,1911.

J. W. RUTTER, *Geometry of curves*, Chapman & Hall /CRC, London, 2000.

A. A. SAVELOV, *Ploskie krivye : sistematika, svoïstva, primeneniïa* (soit *Courbes planes : classification, propriétés, applications*), Moscou, 1960.

J. C. SIDLER, *Géométrie projective, Cours, Problèmes classiques et exercices résolus*, InterEditions, Paris, 1993.
Pour l'étude des homographies du plan.

R. C. YATES, *Curves and their properties*, NCTM, USA, 1952, réédité en 1974.